RELATIVITÉ DU MOUVEMENT ET SYSTÈMES DE COORDONNÉES CARTÉSIENS

ROMMEL NANA DUTCHOU

Résumé. Ce texte établit des transformations entre des variables mesurables d'espace et de temps que peuvent définir deux quelconques expérimentateurs. Il s'agit de présenter une théorie où la stationnarité d'une entité ou d'une distribution d'entités par rapport à un expérimentateur désigné n'est jamais une convention arbitraire et l'exposé sur la cinématique classique est conçue dans cet objectif. L'association de la loi électrostatique de Coulomb, de la relation fondamentale de la dynamique postulée en relativité restreinte et du nouveau groupe des transformations qui contient celui de Poincaré donne une nouvelle description des interactions entre particules élémentaires.

Table des matières

1. Introduction 1
2. La physique classique 1
2.1. La cinématique classique 1
2.2. La dynamique classique 3
3. Une théorie de la relativité 4
3.1. La cinématique 4
3.2. La dynamique 7
4. Conclusion 9
Références 9

1. Introduction

On ne peut représenter une expérience ou expérimenter une loi de la physique qu'au sein d'un référentiel et définir un référentiel d'étude c'est savoir distinguer l'état de mouvement et l'état d'immobilité d'une quelconque entité. Un système de coordonnées, éventuellement définit sur une région limitée de l'univers, est utilisé par un expérimentateur pour identifier un ensemble d'évènements et ne peut permettre de décrire ses observations que s'il dispose d'une formule pour caractériser les trajectoires des entités qui lui paraissent continument immobiles. Une transformation entre de tels systèmes de coordonnées interprétables réalise un changement de référentiel.

Un expérimentateur est toujours muni d'une horloge intrinsèquement régulière au sens où il sait apprécier l'égalité ou la différence des intervalles de temps définis par deux quelconques couples d'évènements éléments de sa trajectoire, son espace physique tridimensionnel est constitué des positions d'entités qui lui paraissent continument immobiles et entre lesquelles il existe des distances spatiales rigides. Établir des lois c'est déterminer les relations qui existe entre les paramètres mesurables qu'il utilise par conséquent la datation des évènements qui ne sont pas éléments de sa trajectoire et les mesures des distances spatiales sont des choix nécessairement arbitraires sous la seule condition d'utiliser des définitions opérationnelles.

Indépendamment de leurs mouvements relatifs, tous les expérimentateurs peuvent choisir d'utiliser le même système de coordonnées pour exprimer les lois régissant leurs observations mais à priori les formules n'auront pas la même structure pour tous et il est naturel de se demander s'il existe une covariance générale lorsque chacun fait un choix particulier. Les postulats 1 et 2 permettent de répondre par l'affirmative.

2. La physique classique

2.1. **La cinématique classique.**

Hypothèse 1. *Il existe une datation universelle qui permet de déterminer par une simple soustraction des valeurs attribuées aux évènements de leurs trajectoires, au choix des étalons de mesure près, les durées de temps propres effectivement écoulées au sein des horloges régulières.*

À tout expérimentateur est fondamentalement associé un espace vectoriel de dimension trois qui lui permet de différencier les directions dans lesquelles se trouvent les entités qui lui paraissent continument immobiles et de définir des vecteurs décrits par les bipoints de son espace physique. Afin de préciser les intensités des mouvements des entités, des distances spatiales peuvent être associées à ces bipoints à partir d'un produit scalaire particulier :

Hypothèse 2. *Deux expérimentateurs P et P' peuvent toujours choisir les produits scalaires sur leurs espaces physiques affines de sorte à constater les mêmes distances spatiales entre les couples d'évènements simultanés.*

Proposition 2.1. *La transformation entre les coordonnées spatiales cartésiennes et rectangulaires (x_2, x_3, x_4) et (x'_2, x'_3, x'_4) que peuvent utiliser P et P' pour identifier les points de leurs espaces physiques est de la forme :*

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2(t) \\ l_3(t) \\ l_4(t) \end{bmatrix} + \lambda A_t \begin{bmatrix} x'_2 + k'_2 \\ x'_3 + k'_3 \\ x'_4 + k'_4 \end{bmatrix}$$

t étant une variable temporelle qui décrit la datation universelle des évènements à un choix d'étalon près et A_t étant une isométrie.

Démonstration. $<,>_p$ étant un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{V}_p$ associé à l'espace affine $\mathcal{E}_p$ qui est l'ensemble des positions des entités continument immobiles d'après P, représenter son espace physique euclidien par le triplet $(\mathcal{E}_p, \mathcal{V}_p, <,>_p)$ est une écriture compacte qui peut masquer le fait que l'ensemble $\mathcal{V}_p$, utilisé par P pour différencier les directions dans lesquelles se trouvent les entités qui lui paraissent continument immobiles, est muni d'une opération particulière qui lui confère une structure d'espace vectoriel de sorte que P puisse associer un vecteur à quelconque bipoint de $\mathcal{E}_p$. La précision de cette opération réalisant des combinaisons linéaires n'est pas superflue car mathématiquement ce n'est pas la seule qui peut conférer à $\mathcal{V}_p$ une structure d'espace vectoriel. En effet, si $\tilde{T}$ est une opération admissible qui est définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{V}_p^2$ et à valeurs dans $\mathcal{V}_p$, et si $\mathcal{A}$ est un automorphisme de $(\mathcal{V}_p, \tilde{T})$, alors l'application $\hat{T}$ définie par :

$$\hat{T}(a\vec{u} + b\vec{v}) = \mathcal{A}\tilde{T}(a\vec{u} + b\vec{v})$$

est admissible. Rigoureusement, l'espace physique euclidien de P sera noté $(\mathcal{E}_p, T_p^O, <,>_p)$ où O est élément de $\mathcal{E}_p$ et où la structure affine T_p^O est une application définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{E}_p^2$ et à valeurs dans $\mathcal{E}_p$ par :

$$\varphi_p\left(O, T_p^O(a, b, M, N)\right) = a\varphi_p(O, M) + b\varphi_p(O, N) \tag{1}$$

φ_p est l'application à valeurs dans $\mathcal{V}_p = (\mathcal{E}_p, T_p^O)$ qui détermine les vecteurs d'espace dans le référentiel de P. Les coordonnées spatiales qu'il utilise pour paramétrer son espace physique sont cartésiennes s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}_p$ et un élément O de $\mathcal{E}_p$ tels que celles qui sont associées à un élément M de $\mathcal{E}_p$ soient les composantes dans $\mathcal{B}$ du vecteur $\varphi_p(O, M)$. Pour établir une transformation entre des coordonnées spatiales cartésiennes construites par P et P' qui sont immobiles aux points O_p et $O_{p'}$ de leurs espaces, la physique classique va émettre à priori l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3. *Quelques soient les éléments M' et N' de $\mathcal{E}_{p'}$ qui décrivent dans $\mathcal{E}_p$ les trajectoires $M'(.)$ et $N'(.)$, quelque soit la date t,*

$$T_{p'}^{O_{p'}}(a, b, M', N')(t) = T_p^{O_{p'}(t)}(a, b, M'(t), N'(t))$$

Soient $(B'_i)_i$ et $(B'_i)_i$ des triplets d'éléments de $\mathcal{E}_{p'}$ et $\mathcal{E}_p$ permettant de définir des bases orthonormées des espaces physiques euclidiens par les égalités :

$$\mathcal{B} = \{(\varphi_p(O_p, B_i))_i\} \quad \mathcal{B}' = \{(\varphi_{p'}(O_{p'}, B'_i))_i\}$$

On considère un évènement qui se produit à la date t, aux points M' et $M'(t)$ de $\mathcal{E}_{p'}$ et $\mathcal{E}_p$. On note (x'_i) et (x_i) ses coordonnées spatiales cartésiennes qui sont relatives à ces bases munies des origines O et O', et on note (k'_i) les coordonnées de $\varphi_{p'}(O_{p'}, O')$ dans $\mathcal{B}'$. On peut écrire :

$$M' = T_{p'}^{O_{p'}}\left(x'_4 + k'_4, 1, B'_4, T_{p'}^{O_{p'}}(x'_3 + k'_3, x'_2 + k'_2, B'_3, B'_2)\right)$$

L'équation (3) permet d'écrire :

$$M'(t) = T_p^{O_{p'}(t)}\left(x'_4 + k'_4, 1, B'_4(t), T_p^{O_{p'}(t)}(x'_3 + k'_3, x'_2 + k'_2, B'_3(t), B'_2(t))\right)$$

On peut noter :

$$\varphi_p(O, M'(t)) = \varphi_p(O, O_{p'}(t)) \; + \; \sum_2^4 (x'_i + k'_i)\, \varphi_p(O_{p'}(t), B'_i(t))$$

Par hypothèse, $<,>_p$ et $<,>_{p'}$ peuvent être choisis de sorte qu'il y ait conservation des distances spatiales entre évènements simultanés à un choix d'étalon près lors d'un changement de référentiel par conséquent le triangle $(O_{p'}(t), B'_i(t), B'_j(t))$ est isocèle et rectangle pour P puisque $(O_{p'}, B'_i, B'_j)$ l'est pour P'. Il existe donc un scalaire λ qui décrit le rapport des étalons de longueurs et une isométrie $\mathcal{A}_t$ de $\mathcal{V}_p$ tels que :

$$\varphi_p(O_{p'}(t), B'_i(t)) = \lambda\, \mathcal{A}_t\, \varphi_p(O_p, B_i)$$

On obtient :

$$\varphi_p(O, M'(t)) = \varphi_p(O, O_{p'}(t)) \; + \; \lambda\, \mathcal{A}_t \; \sum_2^4 (x'_i + k'_i)\, \varphi_p(O_p, B_i)$$

□

Il résulte de cette proposition qu'il existe une fonction vectorielle $\vec{w}(t)$ telle que, si M' et N' sont deux points de l'espace de P' dont les trajets dans l'espace de P sont décrits par les fonctions $M'(t)$ et $N'(t)$, alors :

$$\frac{d}{dt}\varphi_p(M'(t), N'(t)) = \vec{w}(t) \; \times \; \varphi_p(M'(t), N'(t)) \tag{2}$$

Cette relation, qui ne dépend pas des systèmes de coordonnées que P' peut choisir pour étudier un phénomène, aura pour équivalent l'équation (8) dans le cadre de la nouvelle théorie qui se distingue par une modélisation plus réaliste : une entité linéaire et rigide, précisée à partir d'un bipoint d'un espace physique, n'est pas à priori reconnue comme telle par plus d'un référentiel, trois points matériels qui définissent toujours un triangle isocèle et rectangle d'après P' ne paraissent pas à priori dans la même configuration d'après P, et le choix par un expérimentateur d'une datation des évènements ne permet pas à priori de deviner les régularités intrinsèques de toutes les horloges possibles.

On peut se demander s'il est `mathématiquement possible` d'attribuer le même espace physique euclidien à deux expérimentateurs P_1 et P_2 qui sont continument immobiles d'après P' de sorte qu'ils constatent la même fonction vecteur vitesse pour une quelconque entité. La réponse est négative et pour s'en rendre compte il suffit considérer la situation où P' est en rotation uniforme d'après P (conformément à (2), cela signifie `uniquement` que toute entité immobile pour P' est en rotation uniforme dans un repère d'espace cartésien de P lorsqu'il utilise la datation universelle des évènements) et où les distances spatiales constantes qui le séparent de P_1 et P_2 sont différentes. Ces derniers vont constater chacun que le mouvement de P est circulaire et uniforme mais ils ne peuvent pas attribuer le même rayon à cette trajectoire par conséquent le support d'un référentiel doit être réduit à un unique expérimentateur représenté par un point matériel.

2.2. **La dynamique classique.** La notion de force a un caractère absolu dans cette théorie au sens où il existe une classe d'expérimentateurs qui sont dits inertiels, qui sont tels que chacun ne soit soumit à aucune force, et qui sont en translation uniforme les uns par rapport aux autres lorsque chacun choisit d'utiliser la cinématique qui précède sous l'hypothèse que ces choix interdépendants soient possibles. Ce ne sont pas les expérimentateurs humains qui ne ressentent pas d'accélération car on sait qu'une personne en chute libre ne ressent pas son poids et ce document va choisir d'énoncer que pour un quelconque expérimentateur, un corps n'est soumit à aucune force s'il est physiquement impossible d'identifier les causes qui lui imposent sa trajectoire.

La cinématique classique permet d'énoncer que tous les expérimentateurs inertiels sont équivalents pour la formulation des trois premières lois de Newton et de sa loi sur l'interaction gravitationnelle mais cette invariance ne s'étend pas aux lois expérimentales de l'électromagnétisme. Ces dernières mettent en évidence des signaux qui peuvent se propager dans le vide immatériel et qui sont décrits par les équations de Maxwell exprimées dans un référentiel inertiel

spécial. L'effet Doppler-Fizeau établit la relation qui existe, lorsqu'une source et un récepteur sont munis d'horloges numériques régulières et identiques, entre la durée propre séparant l'émission de deux impulsions électromagnétiques qui se propagent dans le vide immatériel et la durée propre séparant leurs réceptions. Du fait des hypothèses fortes qui sont postulées pour deviner les correspondances entre les mesures d'espace et de temps que peuvent effectuer différents expérimentateurs de sorte à permettre aux uns de prédire les vitesses observées par d'autres, la relation Doppler-Fizeau ne dépend pas seulement du mouvement de la source dans le référentiel du récepteur mais dépend nécessairement des mouvements de la source et du récepteur par rapport au référentiel spécial où est formulé la théorie de l'électromagnétisme. Cette bizarrerie est anormale pour certains physiciens et Woldemar Voigt, dans son article sur l'effet Doppler [1], va établir une transformation linéaire des coordonnées qui laisse invariante l'équation d'onde déduite des relations fondamentales de Maxwell. L'ensemble de ces applications est le groupe de Poincaré qui contient des sous groupes particuliers constitués des formules spéciales de Lorentz, formules qui ne diffèrent de celles de Voigt que par un changement de l'étalon des longueurs lors du changement de référentiel et pour les auteurs il s'agit de mettre en évidence des variables pratiques dans les référentiels qui sont en translation uniforme par rapport à l'éther. Albert Einstein constate qu'il est possible de retrouver cette transformation lorsque chaque expérimentateur choisit de mesurer les distances spatiales et de dater les évènements d'une façon spécifique à partir de sa seule horloge régulière et la nouvelle cinématique met en évidence la symétrie de l'effet Doppler-Fizeau. Einstein lui associera une relation fondamentale de la dynamique qui ne diffère de la deuxième loi de Newton que lorsque le corps est déjà en mouvement et dont la covariance permet de retrouver l'expression de la force électromagnétique de Lorentz et toutes équations de Maxwell dites en absence de source à partir de la loi électrostatique de Coulomb.

3. Une théorie de la relativité

3.1. **La cinématique.** La formulation originelle [2] de la relativité restreinte, centrée sur le principe de relativité, propose une description des points de vue des expérimentateurs inertiels. Sans imposer à quiconque le choix d'un système de coordonnées utilisé pour identifier les évènements et étudier un problème particulier où il existe des symétries exploitables, la théorie remarque qu'il est possible d'attribuer à chacun d'entre eux un choix particulier qui est pertinent pour une formulation covariante des lois de l'électromagnétisme et au sein duquel les autres ont un mouvement rectiligne et uniforme.

Un expérimentateur peut toujours être muni d'une horloge intrinsèquement régulière au sens où il sait apprécier l'égalité ou la différence des intervalles de temps propre définis par deux couples d'évènements qui sont éléments de sa trajectoire. Cette horloge peut être choisie avec un affichage numérique, cartésien et normalement orienté : la durée de temps propre écoulée entre les dates successives t_1 et t_2 est proportionnelle au réel positif $t_2 - t_1$, la constante positive de proportionnalité caractérisant un choix d'étalon. Pour une horloge cartésienne anormalement orientée, cette durée est proportionnelle au réel positif $t_1 - t_2$. Comme en physique classique, son espace physique peut être décrit par un quadruplet $(\mathcal{E}_p, T_p^O, <, >_p)$ et il dira qu'un système de coordonnées qu'il utilise est cartésien s'il est constitué des coordonnées spatiales cartésiennes auxquelles sont associés une datation spéciale de chaque évènement, obtenue en émettant à une date t_- de son horloge une impulsion électromagnétique qui se propage dans le vide, en recevant à une date t_+ le signal qui y est réfléchit et en utilisant la formule :

$$t = \frac{1}{2}(t_+ + t_-)$$

Expérimentalement, les dates d'émission et de réception sont uniquement déterminées parce que les équations de Maxwell, qui proviennent des lois empiriques, décrivent le mouvement d'un signal électromagnétique comme étant indépendant de celui de la source. L'hypothèse suivante est une reformulation du deuxième postulat de la relativité restreinte :

Postulat 1. *Tout expérimentateur P qui utilise une datation cartésienne des évènements peut choisir le couple $(T_p^O, <, >_p)$ de sorte à constater qu'un signal électromagnétique qui prend naissance en un évènement donné se propage toujours dans le vide immatériel sous forme d'une sphère dont le rayon croit avec une vitesse constante, la valeur de cette vitesse caractérisant un choix de l'étalon des longueurs.*

Il résulte de ce postulat que si P et P' construisent les systèmes de coordonnées cartésiens (ct, x_2, x_3, x_4) et $(c't', x'_2, x'_3, x'_4)$ qui sont relatifs à des bases orthonormées de leurs espaces

physiques (un tel système de coordonnées est un observateur), c et c' étant les valeurs choisies pour représenter les vitesses de propagation d'un signal électromagnétique, alors quelques soient les évènements i et j on peut écrire :

$$(3) \qquad (ct(j)-ct(i))^2=\sum_{k=2}^{4}(x_k(j)-x_k(i))^2 \Longleftrightarrow (c't'(j)-c't'(i))^2=\sum_{k=2}^{4}(x'_k(j)-x'_k(i))^2$$

Par définition, l'application $(ct,x_2,x_3,x_4)\mapsto(ct',x'_2,x'_3,x'_4)$ est élément du groupe des transformations réellement admissibles. Les solutions affines forment le groupe de Poincaré et on peut penser que ce groupe contient les matrices différentielles des solutions non affines car (3) est valide au voisinage de chaque évènement.

On dira qu'une application continument différentiable qui est définie sur $\mathbb{R}^4$ est une transformation admissible s'il existe un couple de réels (c,c') tel qu'elle transforme toute trajectoire réalisée avec un vecteur vitesse instatanné de module constant égal à c en une trajectoire réalisée avec un vecteur vitesse instatanné de module constant égal à c'.

Théorème 3.1. *Toute transformation réellement admissible est une transformation admissible.*

S et S' étant deux observateurs construits par P et P', la trajectoire dans S d'un point matériel dont le module du vecteur vitesse est constamment égal à c entre les évènements a et b est décrite par l'ensemble :

$$\{(ct,x_2(ct),x_3(ct),x_4(ct))\ ,\ t\in]t_a,t_b[\ ,\ \sum_{i=2}^{4}(\frac{dx_i}{dt})^2=c^2\}$$

On peut définir les ensembles :

$$\tilde{S}_1=\{(u_2,u_3,u_4)\ ,\ u_i\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ,\ u_i=u_i(\xi)\ ,\ \sum_{i=2}^{4}(\frac{du_i}{d\xi})^2=1\}$$

$$\mathcal{T}(\tilde{S}_1)=\Big\{\{(u_1(\eta),u(u_1(\eta)))\ ,\ \eta\in\mathcal{O}\}\ ,\ u_1\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ,\ u\in\tilde{S}_1\ ,\ \mathcal{O}\text{ ouvert de }\mathbb{R}\Big\}$$

On peut noter :

$$x_1=ct \quad x'_1=c't' \quad x'_k=f_k(x_1,x_2,x_3,x_4) \quad f=(f_1,f_2,f_3,f_4)$$

$$\Lambda'=\{(u'_1(\eta),u'_2(u'_1(\eta)),u'_3(u'_1(\eta)),u'_4(u'_1(\eta)))\ ,\ \eta\in\mathcal{O}\}=\{f(M),M\in\Lambda\}=f(\Lambda) \quad \Lambda\in\mathcal{T}(\tilde{S}_1)$$

Le théorème 3.1 permet d'écrire :

$$(4) \qquad \Lambda\in\mathcal{T}(\tilde{S}_1)\Longrightarrow f(\Lambda)\in\mathcal{T}(\tilde{S}_1)$$

En notant $F=(f_{ij})_{ij}$ la matrice différentielle de f, il vient :

$$\begin{pmatrix}\frac{du'_1}{d\eta}\\ \frac{d(u'_2\circ u'_1)}{d\eta}\\ \frac{d(u'_3\circ u'_1)}{d\eta}\\ \frac{d(u'_4\circ u'_1)}{d\eta}\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}\frac{du_1}{d\eta}\\ \frac{d(u_2\circ u_1)}{d\eta}\\ \frac{d(u_3\circ u_1)}{d\eta}\\ \frac{d(u_4\circ u_1)}{d\eta}\end{pmatrix} \qquad \frac{du'_1}{d\eta}\begin{pmatrix}1\\ \frac{du'_2}{d\xi'}\\ \frac{du'_3}{d\xi'}\\ \frac{du'_4}{d\xi'}\end{pmatrix}=F\ \frac{du_1}{d\eta}\begin{pmatrix}1\\ \frac{du_2}{d\xi}\\ \frac{du_3}{d\xi}\\ \frac{du_4}{d\xi}\end{pmatrix}$$

La relation (4) peut se mettre sous la forme :

$$\Big(\frac{du_1}{d\eta}\Big)^2-\sum_{i=2}^{4}\Big(\frac{d(u_i\circ u_1)}{d\eta}\Big)^2=0\ \Longrightarrow\ \Big(\frac{du'_1}{d\eta}\Big)^2-\sum_{i=2}^{4}\Big(\frac{d(u'_i\circ u'_1)}{d\eta}\Big)^2=0$$

Il résulte que F est telle que :

$$(5) \qquad \forall\ h\in\mathbb{R}^4\ ,\ \Big\{h_1^2-\sum_{i=2}^{4}h_i^2=0\Big\}\ \Longrightarrow\ \Big\{h'^2_1-\sum_{i=2}^{4}h'^2_i=0\Big\} \qquad h'=Fh$$

Cette dernière relation permet de démontrer par des calculs simples d'algèbre linéaire que f a les propriétés suivantes :

i: Sa matrice différentielle est élément du groupe de Poincaré en tout évènement, tous ses coefficients s'expriment à l'aide des dérivées partielles de f_1 et la racine carré de la valeur absolue de son déterminant vaut :

$$\mu_f = f_{11}^2 - \sum_{i=2}^{4} f_{1i}^2 > 0 \tag{6}$$

ii: P étant muni de l'observateur S, P' peut toujours choisir S' de sorte que :

$$f_{ii} = \sqrt{\mu_f} + \frac{f_{1i}^2}{f_{11} + \sqrt{\mu_f}} \quad f_{ij} = \frac{f_{1i} f_{1j}}{f_{11} + \sqrt{\mu_f}} \quad f_{i1} = f_{1i} \quad 2 \leq i, j \leq 4 \tag{7}$$

iii: Les composantes v_i du vecteur vitesse dans S d'un point de l'espace physique de P' sont telles que :

$$\frac{v_i}{c}(\tau) = -\frac{f_{1i}}{f_{11}}(\tau, x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau)) \tag{8}$$

iv: Il existe trois matrices A_i^f telles que :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} = A_j^f \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} \quad 2 \leq i, j \leq 4 \tag{9}$$

On peut noter $h(\tau)$ la fonction qui est définie le long de la trajectoire de P' et qui réalise la correspondance entre la coordonnée temporelle τ dans S et la coordonnée temporelle dans S'. Si $(x_i'(O_{p'}))_i$ représente les coordonnées de P' dans S' et si $\tau_-(\alpha)$ et $\tau_+(\alpha)$ sont les coordonnées temporelles dans S d'émission et de réception par P' des signaux qui lui permettent de dater l'évènement α, le postulat 1 donne les relations :

$$\sum_{i=2}^{4} (f_i(.) - x_i'(O_{p'}))^2 = \frac{|h(\tau_+(.)) - h(\tau_-(.))|}{2}$$

$$f_1(.) = \frac{h(\tau_+(.) + h(\tau_-(.))}{2}$$

Précisons f_1 qui est la fonction génératrice de f parce qu'elle permet de construire sa matrice différentielle. $M'(.) = (\sigma, y_2(\sigma), y_3(\sigma), y_4(\sigma))$ et $N'(.) = (\tau, x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau))$ étant deux trajectoires de points matériels dans S, on note $\sigma(\tau)$ l'application qui à la date τ d'émission d'un signal électromagnétique par N' associe la date σ d'interception du signal par M'. Si l'horloge cartésienne utilisée par P pour construire S est normalement orientée, alors :

$$\sigma(\tau) - \tau = \sqrt{\sum_{i=2}^{4} (y_i(\sigma(\tau)) - x_i(\tau))^2}$$

On peut noter :

$$\vec{v}_{M'} = \frac{d}{d\sigma} \varphi_p(O_p, M'(\sigma)) \quad \vec{v}_{N'} = \frac{d}{d\tau} \varphi_p(O_p, N'(\tau)) \quad \vec{r} = \varphi_p(N'(\tau), M'(\sigma(\tau)))$$

Le calcul donne :

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{\sigma(\tau) - \tau - < \vec{v}_{N'}, \vec{r} >_p}{\sigma(\tau) - \tau - < \vec{v}_{M'}, \vec{r} >_p}$$

La durée dans S' qui sépare l'émission du signal par N' et sa réception par M' est la valeur absolue du nombre :

$$f_1(\sigma(\tau), y_2(\sigma(\tau)), y_3(\sigma(\tau)), y_4(\sigma(\tau))) - f_1(\tau, x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau)) \tag{10}$$

Si la transformation admissible f est une transformation réellement admissible alors lorsque M' et N' sont continument immobiles d'après P', $\vec{v}_{M'}$ et $\vec{v}_{N'}$ étant déterminés par (8), la fonction (10) ne dépend pas de la variable τ. On obtient :

$$\frac{d\sigma}{d\tau} \frac{\mu_f}{f_{11}}(\sigma(\tau), M'(\sigma(\tau))) = \frac{\mu_f}{f_{11}}(\tau, N'(\tau))$$

En notant

$$l_i(\tau) = \frac{y_i(\sigma(\tau)) - x_i(\tau)}{\sigma(\tau) - \tau}$$

il vient :

$$\frac{1}{\mu_f}(f_{11}+\sum_{i=2}^{4} f_{1i}l_i)(\sigma(\tau),M'(\sigma(\tau)))=\frac{1}{\mu_f}(f_{11}+\sum_{i=2}^{4} f_{1i}l_i)(\tau,N'(\tau))$$

$\forall(\tau,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$, $\forall(l_2,l_3,l_4)\in\mathbb{R}^3$, $l_2^2+l_3^2+l_4^2=1$, la fonction :

$$\frac{1}{\mu_f}(f_{11}+\sum_{i=2}^{4} f_{1i}l_i)(\tau+\theta,x_2+\theta l_2,x_3+\theta l_3,x_4+\theta l_4)$$

ne dépend pas de la variable θ. Il résulte :

$$\frac{d}{d\tau}(\frac{f_{11}}{\mu_f})+\sum_{i=2}^{4}\left(\frac{d}{d\tau}(\frac{f_{1i}}{\mu_f})+\frac{d}{dx_i}(\frac{f_{11}}{\mu_f})\right)l_i+\sum_{j=2}^{4}\sum_{i=2}^{4}\left(\frac{d}{dx_j}(\frac{f_{1i}}{\mu_f})\right)l_il_j=0 \tag{11}$$

On doit associer à ce système d'équations le fait que (8) donne le vecteur vitesse connu le long de la trajectoire de P' et comme en physique classique (d'après (2) il pourrait être animé d'une rotation relative à P), connaitre cette trajectoire n'est pas nécessairement suffisant pour préciser son état de mouvement. Toutes les solutions de (11) sont physiquement admissibles.

3.2. **La dynamique.** La notion de vecteur force est introduite par un expérimentateur pour représenter les causes qui influencent la trajectoire d'un corps et il est légitime de se demander quels sont ceux qui peuvent utiliser la loi empirique de Coulomb pour la description de l'information générée par une distribution de charges à symétrie sphérique et stationnaire. La physique considère que chaque expérimentateur en chute libre constate les lois de la relativité restreinte dans tout voisinage spatiotemporel immédiat ce qui signifie qu'il utilise la loi de Coulomb pour déterminer le champ électrostatique et qu'il utilise la relation fondamentale de la dynamique pour décrire l'action de ce champ sur des particules tests. La physique constate également qu'un expérimentateur qui n'est pas en chute libre peut se croire dans un champ de gravitation.

On va traduire ces constats par le fait que, dans un observateur qu'elle construit, une particule élémentaire électriquement chargée influence la trajectoire de toute autre suivant la loi de Coulomb et on va mathématiquement déduire de cette seule hypothèse et de la relation fondamentale de la dynamique que pour un quelconque observateur, la nature accélérée du mouvement d'une particule élémentaire lui permet de générer un champ gravitationnel. Conformément à [2], on peut énoncer :

Postulat 2. *On s'intéresse uniquement à une classe d'observateurs qui utilisent les mêmes étalons des longueurs et des durées, et telle que les horloges numériques cartésiennes des expérimentateurs associés aient la même orientation.*

i: *Relativement à un quelconque observateur, la résultante des forces qui s'appliquent à une particule élémentaire de masse inerte m et de vecteur vitesse $\vec{u}$ s'écrit :*

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}})$$

ii: *Il existe une constante k telle que dans un observateur construit par une particule élémentaire de charge électrique q', le vecteur force qu'elle exerce sur une particule test q en un évènement où ils forment un vecteur d'espace $\vec{r}'$ s'écrit :*

$$\vec{F'}=kqq'\frac{\vec{r}'}{r'^3}$$

Dans la pratique, deux expérimentateurs utilisent les mêmes étalons des longueurs et des durées si leurs horloges numériques cartésiennes sont identiques et s'ils utilisent la même constante c pour représenter la vitesse de propagation d'un signal électromagnétique dans le vide. Si dans un observateur S un disque D est mis en rotation autour d'un axe qui passe par son centre et qui est perpendiculaire à sa surface, alors la relation fondamentale de la dynamique implique que la vitesse de rotation ne peut atteindre une valeur limite sans que la structure ne se déforme.

En utilisant la première partie du postulat 2, on s'intéresse à la relation qui existe entre la résultante $\vec{F}$ des forces qui s'appliquent dans S sur une particule M située en un évènement α et la résultante $\vec{F'}$ constaté dans S'. On peut noter :

$$x_i'^m(\tau)=f_i(\tau,x_2^m(\tau),x_3^m(\tau),x_4^m(\tau))$$

Il faut remarquer que $\tau'^m = x_1'^m$ n'est pas un temps propre cartésien de M mais une date cartésienne utilisée par P' pour la localiser. u_i et u'_i étant les composantes du vecteur vitesse de M d'après S et S', on peut écrire :

$$\frac{u'_i}{c} = (f_{11} + \sum_{j=2}^{4} f_{1j}\frac{u_j}{c})^{-1}\,(f_{i1} + \sum_{j=2}^{4} f_{ij}\frac{u_j}{c})$$

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \sqrt{\mu_f}\,(f_{11} + \sum_{j=2}^{4} f_{1j}\frac{u_j}{c})^{-1}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{12}$$

Si on note $\dfrac{1}{\gamma_{u'}}$ le premier terme de cette deuxième égalité, il vient :

$$\gamma_{u'}\frac{u'_i}{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu_f}}\,(f_{i1}\gamma_u + \sum_{j=2}^{4} f_{ij}\gamma_u\frac{u_j}{c}) \tag{13}$$

Sachant que $\dfrac{d}{d\tau}(\gamma_u) = \dfrac{1}{c^2} < \vec{u}, \dfrac{d}{d\tau}(\gamma_u\vec{u}) >_p$, si m est la masse inerte de M, il vient :

$$F'_i = (f_{11}+\sum_{j=2}^{4} f_{1j}\frac{u_j}{c})^{-1}\left(\gamma_u mc^2\frac{d}{d\tau}(\frac{f_{i1}}{\sqrt{\mu_f}}) + \gamma_u mc^2\sum_{j=2}^{4}\frac{d}{d\tau}(\frac{f_{ij}}{\sqrt{\mu_f}})\frac{u_j}{c} + \frac{1}{\sqrt{\mu_f}}\sum_{j=2}^{4}(f_{i1}\frac{u_j}{c} + f_{ij})F_j\right)$$

$$\gamma_{u'}F'_i = \frac{\gamma_u^2 mc^2}{\sqrt{\mu_f}}\left(\frac{d}{d\tau}(\frac{f_{i1}}{\sqrt{\mu_f}}) + \sum_{j=2}^{4}\frac{d}{d\tau}(\frac{f_{ij}}{\sqrt{\mu_f}})\frac{u_j}{c}\right) + \frac{\gamma_u}{\mu_f}\sum_{j=2}^{4}(f_{i1}\frac{u_j}{c} + f_{ij})F_j \tag{14}$$

On cherche à exprimer F'_i uniquement en fonction de $\vec{F}$, de f et $\vec{u}'$. On peut établir que la matrice inverse $(g_{ij})_{ij}$ de celle précisée à l'équation (7) est telle que :

$$g_{11} = \frac{f_{11}}{\mu_f} \quad g_{1i} = -\frac{f_{1i}}{\mu_f} \quad i \neq 1$$

Les équations (12) et (13) permettent alors d'écrire :

$$\gamma_u = \frac{\gamma_{u'}}{\sqrt{\mu_f}}(f_{11} - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}\frac{u'_k}{c}) \quad \gamma_u\frac{u_j}{c} = \frac{\gamma_{u'}}{\sqrt{\mu_f}}\,(-f_{j1} + \sum_{k=2}^{4} f_{jk}\frac{u'_k}{c})$$

Par ailleurs, $\dfrac{d}{d\tau}(\dfrac{f_{ij}}{\sqrt{\mu_f}})$ peut se mettre sous la forme :

$$a^{ij}(f) + \sum_{k=2}^{4} b_k^{ij}(f)\frac{u_k}{c}$$

En remplacant ces relations dans (14), il apparait qu'il existe un vecteur $\vec{G}'$, une application linéaire $\mathcal{A}'_1$ et une application bilinéaire $\mathcal{A}'_2$ définies sur $\mathcal{V}_{p'}$, deux applications linéaires $\mathcal{A}'_3$ et $\mathcal{A}'_4$ définies sur $\mathcal{V}_p$ et à valeurs dans $\mathcal{V}_{p'}$, telles que :

$$\vec{F}' = \gamma_{u'}m\left(\vec{G}' + \mathcal{A}'_1(\vec{u}') + \mathcal{A}'_2(\vec{u}', \vec{u}')\right) + \mathcal{A}'_3(\vec{F}) + \vec{u}' \times \mathcal{A}'_4(\vec{F})$$

Il s'agit à présent de déterminer, dans un observateur arbitrairement choisi S, la force exercée sur une particule test q de masse inerte m et de vecteur vitesse $\vec{u}$ par une particule élémentaire de charge électrique q'. Pour appliquer le postulat 2, on choisit un observateur S' construit par q' et il résulte de ce qui précède la formule :

$$\vec{F} = \gamma_u m(\vec{G} + \mathcal{A}_1(\vec{u}) + \mathcal{A}_2(\vec{u}, \vec{u})) + q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \tag{15}$$

Les grandeurs $\vec{G}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les champs générés par q' dans S. Si f est élément du groupe de Poincaré alors le mouvement de q' dans S est rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v}$, le vecteur force qu'elle exerce sur une particule test est une force de Lorentz et les champs électrique et magnétique qui lui sont associés satisfont les équations de Maxwell dites dans le vide, ces équations étant fondamentales au sens où elles ne dépendent pas $\vec{v}$.

4. Conclusion

Cet article de physique théorique propose un modèle qui contient les prédictions de la relativité restreinte et qui donne une signification physique à la notion fondamentale de référentiel d'un expérimentateur, quel qu'il soit. Il faut remarquer que les trois hypothèses qui sont indispensables pour comparer les points de vue des expérimentateurs en physique classique ont à priori la même valeur scientifique que le postulat 1 et seule l'expérimentation de leurs conséquences peut mettre en évidence leurs plausibilités.

Références

[1] Woldemar Voigt, *Ueber das Doppler'sche Princip*, Göttinger Nachr., Nr. 8, 41-51.Sitzung vom 8. Januar 1887. Ausgegeben am 10. März 1887

[2] Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 322(10) : 891-921.